Trendy v podnikání - Business Trends (2018), 8(2), 25-32.
https://doi.org/10.24132/jbt.2018.8.2.25_32

VYUŽITÍ ALFA–STABILNÍHO ROZDĚLENÍ K MODELOVÁNÍ MIGRACE
MIGRATION MODELING AS APPLICATION OF ALPHA–STABLE DISTRIBUTION

Jaromír Kukal[1], Quang Van Tran[2]

[1] Doc. Ing. Jaromír Kukal, PhD., České vysoké učení technické, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, jaromir.kukal@fjfi.cvut.cz.
[2] Ing. Quang Van Tran, PhD., České vysoké učení technické, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, tranvqua@fjfi.cvut.cz.

Abstract: Migration is very wide term describing any case of object movement in given space. Migration phenomena can be modelled from a theoretical as well as an empirical perspective. Many researches have been analysing the causes of this timely event to give the answer to questions who, why, when and where people migrate and what are the social and economic consequences for migrants as well as for those in the origin and destination areas This study is focused on theoretical background of anomalous diffusion of points in 2D spaces. Meanwhile the theory of traditional diffusion is connected with Gaussian distribution and Brownian motion, the anomalous diffusion is driven by alpha–stable distribution and particles perform Lévy flights. Basic properties of stochastic migration model with anomalous diffusion and various boundary conditions are demonstrated and compared with traditional diffusion. This approach will be useful for more complex investigation of economical subject migration involving deterministic driving forces, spatial inhomogeneity and complex geographical boundary conditions in the future.

Keywords: alpha–stable distribution, anomalous diffusion, stochastic simulation, migration model, boundary effect

JEL Classification: C63, J61

ÚVOD

Migrace z ekonomických, sociálních či politických důvodů je více než aktuální problém. Z pohledu mikroekonomie je migrace ekonomického subjektu dána teorií užitku. Subjekt porovnává užitek v současném stavu (místo a okolnosti) s užitkem v novém stavu po korekci na ztrátu užitku v průběhu změny včetně náhodných faktorů. Výsledkem je rozhodnutí o změně stavu. Jde o velmi náročnou úlohu, kterou není vždy možné řešit explicitně. Za těchto okolností se nabízí simulace metodou Monte Carlo jako vhodná možnost jak zohlednit složitá pravidla rozhodování, nehomogenity prostředí, okrajové podmínky a náhodné faktory. Na rozdíl od modelů jiných autorů (viz Greenwood, 1985, Mills, 2006) cílem článku je formulovat a ověřit základní stavební kameny modelu migrace, který již zahrnuje anomální chování jedince a jeho interakci s překážkami, tedy najít odpověď na otázku, až kam jsou jedinci ochotni migrovat, když jsou už rozhodnutí pro migraci. Výhodou tohoto přístupu je možnost využít analytické řešení příslušných diferenciálních rovnic k exaktní počítačové simulaci. Uvedený základní model bude možné následně rozšiřovat o další aspekty migrace: nehomogenity, hnací síly dané teorií užitku a další ekonomické, sociologické a politické aspekty. Tím vzniknou podklady pro rozhodování v oblasti řízení migrace stejně tak jako v oblasti regionální a urbanistické politiky.

1. MOTIVACE K MODELOVÁNÍ MIGRACE

Pokud se díváme na migraci jako na pohyb částice v n–rozměrném prostoru bez působení vnějších sil, pak jde o značné zjednodušení reality. Nemusíme se však obávat, že takový model nebude možné rozšiřovat o dodatečné hnací síly a další faktory ovlivňující pohyb. Situace je podobná jako na počátku

20. Století, kdy Smoluchowski (1906) velmi snadno a elegantně rozšířil Einsteinův model difuze o působení vnějších sil. Výhodou výše uvedeného zjednodušení je elegance stochastického modelování ve spojitém prostoru a diskrétním čase. Přitom nejprve využijeme vlastnosti Gaussova vícerozměrného rozdělení, které umožní simulaci klasické difuze. Zajímavějších výsledků docílíme modelováním anomální či dokonce balistické difuze s využitím alfa–stabilního či Cauchyova vícerozměrného rozdělení. Konkrétní simulace nám ukáží, že anomální difuze mnohem lépe vystihuje semknutost populace při současném výskytu intenzivně migrujících jedinců stejného typu. Je to dáno těžkými konci příslušných rozdělení. Modely volné difuze jsou rozšířeny o vliv bariér, které omezují volný pohyb. Při modelování interakce s hranicí si navíc ověříme techniku zmenšování simulačního kroku, neboť již prostý odraz částice od překážky je důsledkem působení vnější síly. Získané zkušenosti se budou hodit k modelování nehomogenit a nelinearit při budoucím rozšiřování modelu.

2. BROWNŮV POHYB JAKO MODEL DIFUZE

Pokud pohyb částic probíhá v kontinuu, tj. ve spojitém prostředí, pak k jeho popisu vystačíme s klasickou difuzí, ta je v n–rozměrném prostoru popsána parciální diferenciální rovnicí druhého Fickova zákona

$$\frac{\partial c(\mathbf{x},t)}{\partial t} = D\nabla^2 c(\mathbf{x},t) \tag{1}$$

kde c je koncentrace částic, D je jejich difuzivita v daném prostředí, t je čas a x je polohový vektor (viz Fick, 1995).

Pro migraci částic z bodového zdroje platí počáteční podmínka

$$c(\mathbf{x},\mathbf{0}_+) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0), \tag{2}$$

kde δ je n-rozměrná Diracova delta funkce. Analytickému řešení pro volnou difuzi ve tvaru Greenovy funkce

$$c(\mathbf{x},t) = (2Dt)^{-n/2}\mathrm{G}_n\left((2Dt)^{-1/2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\right), \tag{3}$$

kde G_n je hustota standardizovaného n-rozměrného normálního rozdělení.

Vlastní simulace pohybu částice při klasické difuzi představuje Brownův pohyb v diskrétním čase daný vztahem

$$\mathbf{x}(t+\Delta t) = \mathbf{x}(t) + (2D\Delta t)^{1/2}\mathbf{y} \tag{4}$$

kde $\Delta t>0$,**y** ~ N(**0**,**I**) je krok simulace a standardizované n-rozměrné normální rozdělení.

3. MODELOVÁNÍ ANORMÁLNÍ DIFÚZE POMOCÍ ALFA-STABILNÍHO ROZDĚLENÍ

Pokud se chceme vymanit ze zajetí představy kontinua, získáme cenný model, který umožňuje popsat situace, kdy se určitý podíl částic dostane mnohem dál, než jsme čekali. Uvedený model se nazývá anomální difuze (Pekalski a Sznajd-Weron, 1999, Pozrikidis, 2016). Druhý Fickův zákon anomální difúze má tvar

$$\frac{\partial c(\mathbf{x},t)}{\partial t} = D_\alpha \nabla^{(\alpha)} c(\mathbf{x},t), \tag{5}$$

kde 1 < α <2 je exponent anomální difuze, D_α je anomální difuzivita a ∇^((α)) je anomální Laplaceův operátor (Herrmann, 2011, Pozrikidis, 2016). Počáteční podmínka

$$c(\mathbf{x},\mathbf{0}_+) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) \tag{6}$$

generuje analytické řešení ve tvaru Greenovy funkce jako

$$c(\mathbf{x},t) = (2D_\alpha t)^{-n/\alpha} \mathrm{L}_{n,\alpha}\left((D_\alpha t)^{-1/\alpha}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\right), \tag{7}$$

kde $L_{n,\alpha}$ je hustota n-rozměrného alfa–stabilního rozdělení.
Z toho plyne, že k simulaci migrace částice použijeme tzv. Lévyho lety popsané vztahem

$$\mathbf{x}(t+\Delta t) = \mathbf{x}(t) + (D_\alpha \Delta t)^{1/\alpha}\mathbf{y} \tag{8}$$

kde $\Delta t>0$, $\mathbf{y} \sim L_{n,\alpha}$ je krok simulace a standardizované n-rozměrné alfa–stabilní rozdělení.
Z terminologického hlediska při α→2- přechází anomální difuze v klasickou difuzi, zatímco při α→1+ hovoříme o balistické difuzi jako o druhém extrémním případě, kdy dokonce můžeme modelovat anomální migraci pomocí n-rozměrného Cauchyova rozdělení. Při simulaci migrace částic tedy nejsme nikterak omezeni a vhodnou volbou exponentu anomální difuze pokryjeme všechny uvedené možnosti.

4. IMPLEMENTAČNÍ DETAILY

Vícerozměrné alfa–stabilní rozdělení patří do skupiny rozdělení schopných zachytit šikmost a těžké konce, a proto má široké aplikační možnosti. Náhodná veličina má alfa–stabilní rozdělení, když lineární kombinace nezávisle a stejně rozdělených náhodných veličin má identické rozdělení. Obecně hustota tohoto rozdělení není známá v analytickém tvaru. Je známá pouze její charakteristická funkce, která má pro izotropní standardizovanou stabilní náhodnou veličinu X tvar (Nolan, 2013)

$$\psi(\mathbf{u}) = E\exp\ (i\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}) = \exp(-|\mathbf{u}|^{\boldsymbol{\alpha}}) \tag{9}$$

$$\mathbf{X} = A^{\frac{1}{2}}\mathbf{G}, \tag{10}$$

$$\mathbf{G} \sim \mathrm{N}(\mathbf{0},\mathbf{I}), \tag{11}$$

$$A \sim S_{\boldsymbol{\alpha}}\left(\frac{\alpha}{2}, 1{,}2\cos(\alpha\pi/4)^{2/\alpha}, 0\right), \tag{12}$$

pro 0 < α <2, kde a S_α je jednorozměrné alfa–stabilní rozdělení. Z výše uvedeného je patrné, že náhodnou veličinu vícerozměrného stabilního rozdělení s parametrem α lze simulovat pomocí jednorozměrného alfa–stabilního rozdělení (Samorodnitsky a Taqqu, 1994). Algoritmus pro generování jednorozměrné standardizované alfa–stabilní náhodné veličiny Y ~ S(α,β,1,0) je následující (Chambers, Mallows a Stuck, 1976):

- Vygenerovat $U \sim \mathrm{U}\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ a $W \sim \exp(1)$, kde U a exp představují rovnoměrné a exponenciální rozdělení.
- Pro α ≠1

$$Y = (1+\zeta^2)^{\frac{1}{2\alpha}}\ \frac{\sin\left(\alpha(U+\xi)\right)}{(\cos U)^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\frac{\cos\left(U-\alpha(U+\xi)\right)}{W}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \tag{13}$$

Pro α=1

$$Y = \frac{1}{\xi}\left[\left(\frac{\pi}{2}+\beta U\right)\mathrm{tg}U - \beta\left(\frac{\pi W\cos U}{\pi+2\beta U}\right)\right] \tag{14}$$

https://doi.org/10.24132/jbt.2018.8.2.25_32

kde $\zeta = -\beta \operatorname{tg}\frac{\alpha\pi}{2}$ a $\xi = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}(-\zeta) & \text{pro } \alpha \neq 1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro } \alpha = 1 \end{cases}$

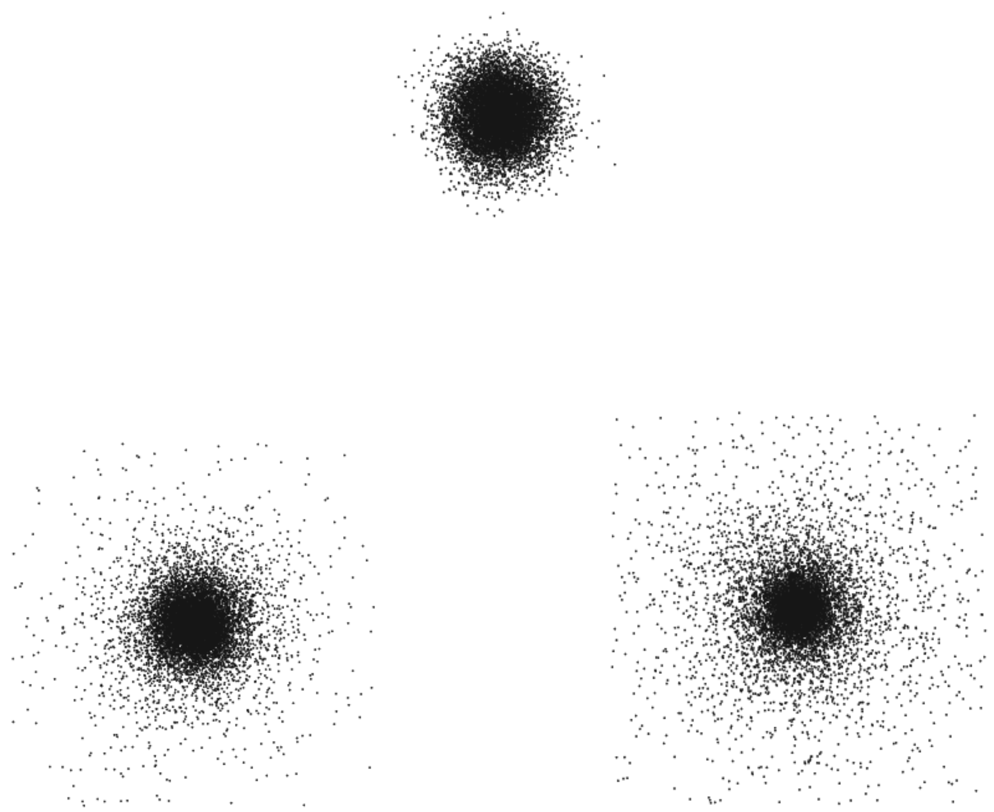
Uvedené vztahy lze snadno implementovat v prostředí Matlabu a využít je přímo k simulačním výpočtům.

5. NUMERICKÉ EXPERIMENTY S OKRAJOVÝMI PODMÍNKAMI

Cílem numerických experimentů s výše uvedenými modely je ukázat rozdíly mezi modelováním migrace jedinců pomocí klasické, anomální a balistické difuze v různém geometrickém uspořádání. Veškeré zde uvedené výsledky počítačových simulací byly provedeny ve dvourozměrných prostorech, které nejlépe vystihují migraci objektů po daném povrchu ve 3D prostoru. Simulace byla prováděna v bezrozměrném unifikovaném tvaru daném volbou D_α=Δt=1. Byly porovnávány tři reprezentativní typy difuze jako studované modely migrace:

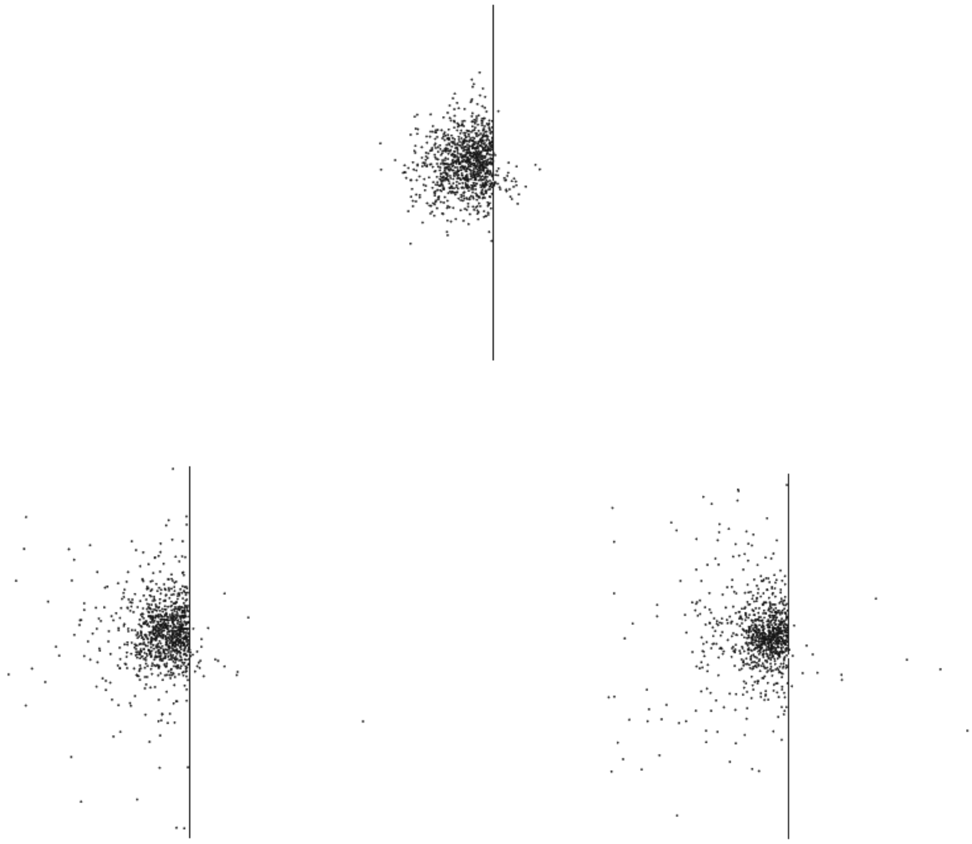
- klasická difuze pro α→2-(horní část obrázků),
- anomální difuze pro α=3/2 (levá dolní část obrázků),
- balistická difuze pro α→1+(pravá dolní část obrázků).

Obr. 1: Volná difuze



Zdroj: Autoři

Obr. 2: Průchod bránou v bariéře

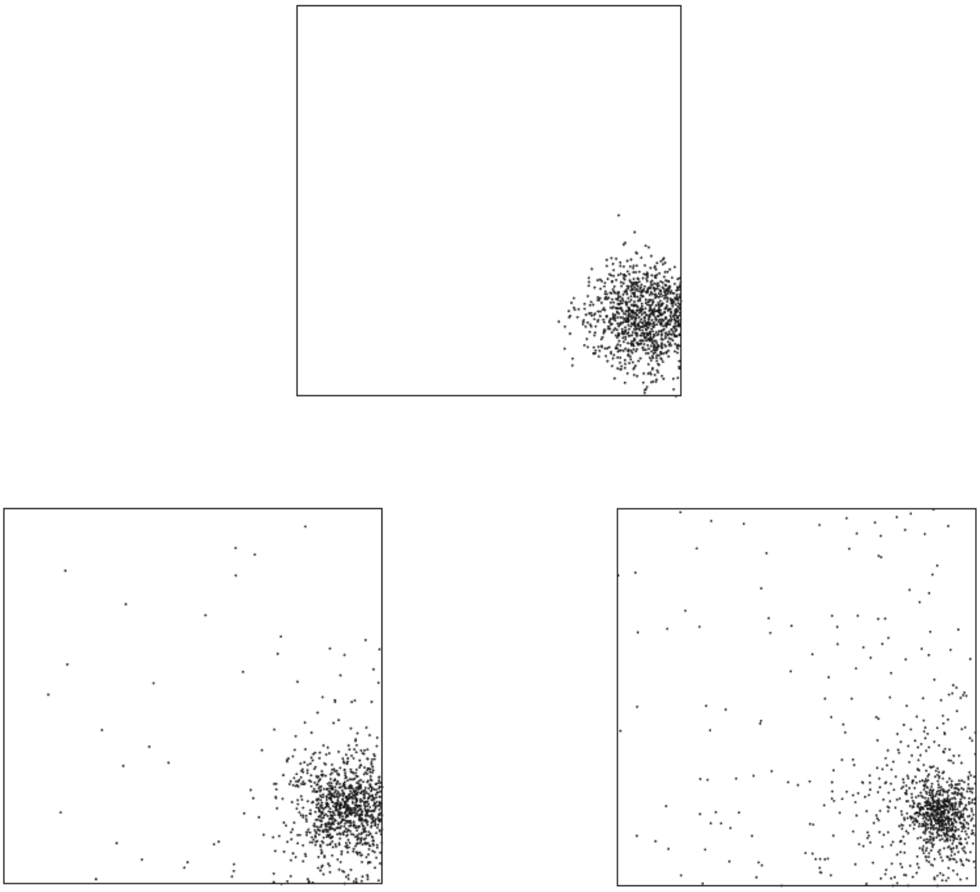


Zdroj: Autoři

Nejprve byla studována volná migrace v rovině (Obr. 1) pomocí nezávislého opakovaného vypouštění migrujících objektů z počátku souřadného systému. Zakresleny jsou pouze koncové polohy jednotlivých objektů. Názorně vidíme ohraničený dosah migrace modelované klasickou difuzí, zatímco migrace s anomální a balistickou difuzí generují odlehlé hodnoty a současně vedou k zapouzdření zbylé části populace bodů, což je velmi typické pro jev, kterému včelaři říkají rojení a který je typickým projevem jakékoli živé populace.
Z hlediska stochastické počítačové simulace v diskrétním čase je mnohem komplikovanější studovat migrace pomocí difuzních procesů s okrajovými podmínkami. Pak je nezbytně nutné volit o několik řádů menší časový krok simulace. Proto byly následující výpočty provedeny jako posloupnost 10 000 na sebe navazujících krátkých kroků, kde v každém kroku je posuzována možná interakce s hranicí oblasti.
Pokud budeme sledovat pouze překážky, které pasivně brání pohybu migrujících jedinců, pak dojde po interakci k odrazu. Příkladem může být klasická nepřekonatelná zeď resp. přímka jako její analogie v 2D prostoru. Pokud je v uvedené jednoduché bariéře brána jako jediná možnost úniku z daného území, pak dochází nejen k odrazu od bariéry, ale i k průchodu částic bránou, která se chová téměř jako bodový zdroj migrujících subjektů za bariérou (Obr. 2). Jiná situace nastává při důsledném ohraničení oblasti ze všech stran (Obr. 3), což může odpovídat migraci v rámci jednom regionu, jedné ekonomiky nebo jednoho ekonomického bloku. V tomto případě mnohonásobné vnitřní odrazy způsobí zvýšení koncentrace částic v porovnání s volnou migrací. Pokud studujeme migraci jedinců na povrchu koule (Obr. 4), pak jde rovněž o ohraničený 2D systém, akorát hranice není dána explicitně. Porovnáním s volnou migrací jasně vidíme, že se při 2D rojení na povrchu koule mimo jádro roje vyskytuje určitý podíl objektů s nenulovou koncentraci úplně všude. To se u migrace modelované klasickou difuzí stane až po zániku jádra populace. Tento fakt by neměl být překvapením, protože například včelaři, epidemiologové a vysokoškolští pedagogové to

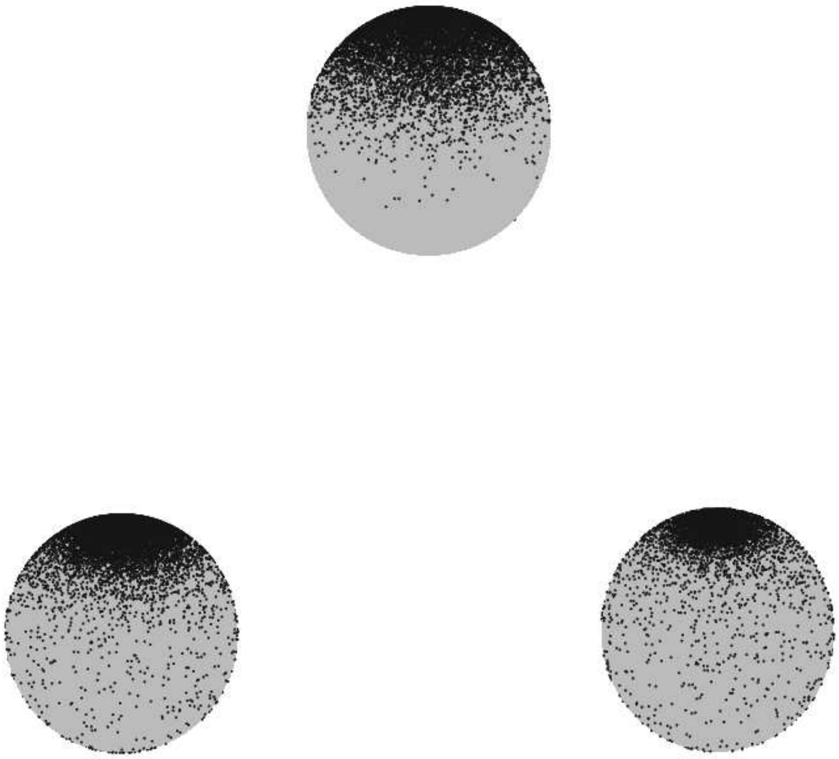
vědí již dávno, neboť některé včely, viry a absolventi jsou zcela nepochopitelně úplně někde jinde. Model anomální difuze včetně balistické nám tedy může posloužit jako nástroj k modelování reálné migrace z fyzikálních, chemických, biologických, sociologických, ekonomických, politických i jiných příčin.

Obr. 3: Migrace v ohraničené oblasti



Zdroj: Autoři

Obr. 4: Migrace na povrhu koule



Zdroj: Autoři

ZÁVĚR

V článku byly analyzovány modely migrace založené na klasické, anomální a balistické difuzi. Zatímco volná difuze je snadno popsatelný proces včetně analytického řešení a snadné simulace, rozšiřování modelu o interakci s hranicemi a další faktory je čistě numerickou záležitostí. Metodou Monte Carlo se podařilo demonstrovat užitečnost anomální difuze, neboť lépe vystihuje chování populace při bezcílné migraci. Dále byla studována interakce migrujících subjektů s migračními překážkami. Výsledky simulací ukazují následky odrazu od bariéry, průchodu mezerou v bariéře i omezenosti pohybu po kulové ploše. Na dosažené výsledky bude možné navázat konstrukcí komplikovanějšího modelu s dalšími faktory ovlivňujícími migraci.

Poděkování: Autoři děkují za finanční podporu grantu SGS17/196/OHK4/3T/14 ČVUT v Praze, v jehož rámci byl tento článek vytvořen.

https://doi.org/10.24132/jbt.2018.8.2.25_32

LITERATURA

Fick, A. (1995). On liquid diffusion. In *Journal of Membrane Science.* 100, 33–38.
Greenwood, M. (1985). Human migration: Theory, models and empirical studies. In *Journal of Regional Science*. 25, 521–544.
Herrmann, R. (2011). *Fractional Calculus: An Introduction for Physicists*. Singapore: World Scientific.
Mills, E. S. (2006). *Handbook of Regional and Urban Economics: Urban Economics.* Amsterdam: Elvisier.
Nolan, J. P. (2013). Multivariate Elliptically Contoured Stable Distributions: Theory and Estimation. In *Computational statistics*. 28(5), 2067–2089.
Pekalski, A., Sznajd-Weron, K. (1999). *Anomalous Diffusion: From Basics to Applications*. Berlin: Springer-Verlag.
Pozrikidis, C. (2016). *The Fractional Laplacian*. New York: Chapman and Hall.
Samorodnitsky, G., Taqqu, M. (1994). *Stable Non-Gaussian Random Processes*. New York: Chapman and Hall.
von Smoluchowski, M. (1906). Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekularbe-wegung und der Suspensionen. In *Ann. Physik (Leipzig)*. 21, 756.